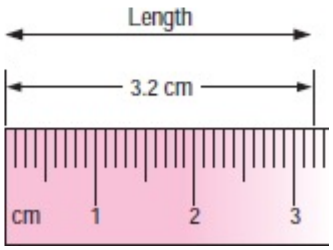
Práctica #4: Análisis Dimensional

Ing. Luis Zambrano
Mecánica de fluidos - ESPOL

2021

Parámetros adimensionales. Análisis dimensional.



Una ***dimensión*** es la medida de una cantidad física.
Una ***unidad*** es un número que se le asigna a una dimensión.

Una ***magnitud adimensional*** es aquella que carece de una unidad de medida asociada. Como ejemplos se tienen la cantidad de objetos de un conjunto de ítems, las proporciones, los números adimensionales de ingeniería (Reynolds, Mach, etc.).

El ***análisis dimensional*** es un método para reducir el número y complejidad de variables experimentales que intervienen en un fenómeno físico dado utilizando un método de "compactación".

Si un fenómeno depende de ***n variables***, el método reducirá el problema a ***k variables adimensionales*** donde *n* - *k* depende de la complejidad del problema.

Parámetros adimensionales. Análisis dimensional.

En general, *n-k* es el número de las variables independientes que gobiernan el problema.

En Mecánica de los Fluidos, estas variables independientes son la masa, la longitud, el tiempo y la temperatura.

Primary dimensions and their associated primary SI and English units

Dimension	Symbol*	SI Unit	English Unit
Mass	m	kg (kilogram)	lbm (pound-mass)
Length	L	m (meter)	ft (foot)
Time†	t	s (second)	s (second)
Temperature	T	K (kelvin)	R (rankine)
Electric current	I	A (ampere)	A (ampere)
Amount of light	C	cd (candela)	cd (candela)
Amount of matter	N	mol (mole)	mol (mole)

Ejemplo: Supongamos que se sabe que la fuerza que actúa sobre un cuerpo depende de 4 variables

$$F = f(L, V, \rho, \mu)$$

(para definir 10 puntos, uno por cada L son necesarios 10 experimentos por variable, es decir 10^4 = **10000 ensayos**)

$\xrightarrow{\text{Análisis Dimensional}}$

$$F^* = \frac{F}{\rho V^2 L^2} = g\left(\frac{\rho V L}{\mu}\right)$$

$$C_F = g(Re)$$

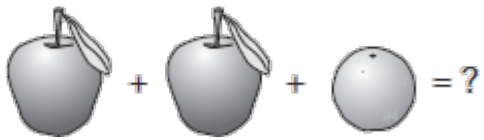
(10^1 = **10 ensayos**)

Ventajas adicionales:

- Ayuda a definir experimentos y planificar teorías,
- Permite definir "escalas" que dan lugar a "modelos" pequeños que permitirán reducir los "prototipos" a fabricar para probar un diseño.

Principio de homogeneidad dimensional (PHD)

Si una ecuación expresa correctamente la relación entre variables de un fenómeno o proceso físico, esta ecuación será ***dimensionalmente homogénea***, es decir que cada término de la misma tiene las mismas dimensiones.



Ejemplo, cinemática de una partícula: $\mathsf{X} = X_0 + V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$

Ejemplo, ecuación de Bernoulli: $\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + gz = C$

Cada término de esta ecuación, podrá contener:

- Variables dimensionales (ej. Presión).
- Constantes dimensionales (ej. Gravedad).
- Constantes puras (ej. π, $1/2$)

Principio de homogeneidad dimensional (PHD)

"Es posible escribir cualquier ecuación dimensionalmente homogénea en una forma equivalente, totalmente adimensional, mas compacta"

"En el Proceso de Adimensionalizar una Ecuación con frecuencia aparecen parámetros adimensionales en la mayoría de los casos reciben el nombre en honor a algún Ingeniero / científico famoso"

Números Adimensionales

Parameter	Definition	Qualitative ratio of effects	Importance
Reynolds number	$\mathrm{Re} = \frac{\rho U L}{\mu}$	$\frac{\text{Inertia}}{\text{Viscosity}}$	Always
Mach number	$\mathrm{Ma} = \frac{U}{a}$	$\frac{\text{Flow speed}}{\text{Sound speed}}$	Compressible flow
Froude number	$\mathrm{Fr} = \frac{U^2}{gL}$	$\frac{\text{Inertia}}{\text{Gravity}}$	Free-surface flow
Weber number	$\mathrm{We} = \frac{\rho U^2 L}{\Upsilon}$	$\frac{\text{Inertia}}{\text{Surface tension}}$	Free-surface flow
Cavitation number (Euler number)	$\mathrm{Ca} = \frac{p - p_v}{\rho U^2}$	$\frac{\text{Pressure}}{\text{Inertia}}$	Cavitation
Prandtl number	$\mathrm{Pr} = \frac{\mu c_p}{k}$	$\frac{\text{Dissipation}}{\text{Conduction}}$	Heat convection
Eckert number	$\mathrm{Ec} = \frac{U^2}{c_p T_0}$	$\frac{\text{Kinetic energy}}{\text{Enthalpy}}$	Dissipation
Specific-heat ratio	$k = \frac{c_p}{c_v}$	$\frac{\text{Enthalpy}}{\text{Internal energy}}$	Compressible flow

Números Adimensionales

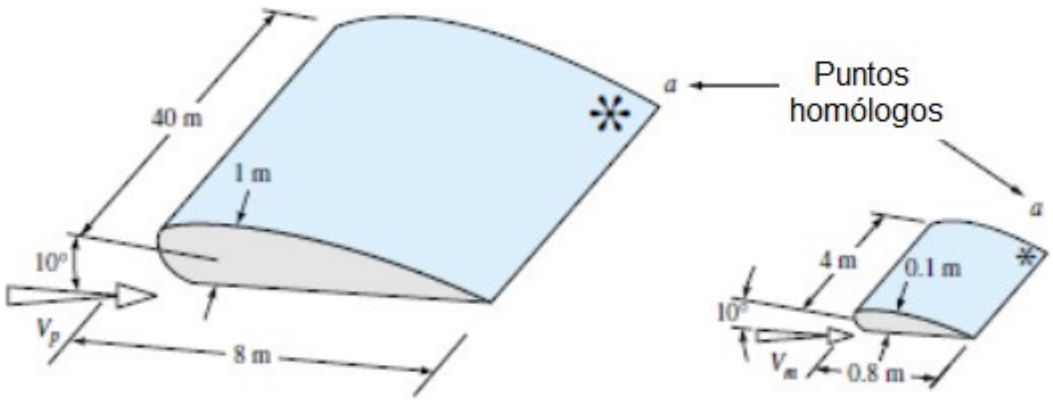
Parameter	Definition	Qualitative ratio of effects	Importance
Strouhal number	$\mathrm{St} = \frac{\omega L}{U}$	$\frac{\text{Oscillation}}{\text{Mean speed}}$	Oscillating flow
Roughness ratio	$\frac{\epsilon}{L}$	$\frac{\text{Wall roughness}}{\text{Body length}}$	Turbulent, rough walls
Grashof number	$\mathrm{Gr} = \frac{\beta \Delta T g L^3 \rho^2}{\mu^2}$	$\frac{\text{Buoyancy}}{\text{Viscosity}}$	Natural convection
Temperature ratio	$\frac{T_w}{T_0}$	$\frac{\text{Wall temperature}}{\text{Stream temperature}}$	Heat transfer
Pressure coefficient	$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2}$	$\frac{\text{Static pressure}}{\text{Dynamic pressure}}$	Aerodynamics, hydrodynamics
Lift coefficient	$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$	$\frac{\text{Lift force}}{\text{Dynamic force}}$	Aerodynamics, hydrodynamics
Drag coefficient	$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$	$\frac{\text{Drag force}}{\text{Dynamic force}}$	Aerodynamics, hydrodynamics

Similitud entre modelo y prototipo

"Las condiciones de flujo para un modelo de prueba son similares si todos los parámetros adimensionales tienen los mismos valores entre modelo y prototipo"

Similitud entre Modelo y Prototipo

Semejanza geométrica

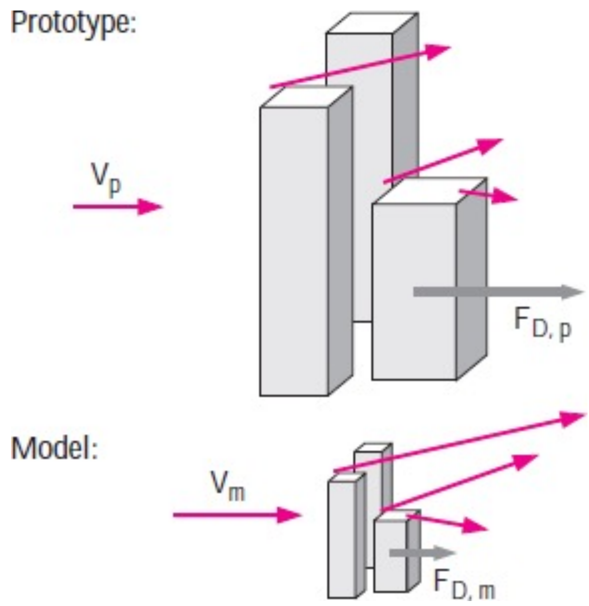


Un modelo es **geométricamente similar** a un prototipo si y solo **si todas las dimensiones del cuerpo** en las tres coordenadas espaciales forman las **mismas proporciones** respectivamente.

Todos los **ángulos y direcciones del flujo se mantienen** cuando **existe similitud geométrica**. La orientación del modelo respecto del medio debe ser idéntica a la del prototipo .

Similitud entre Modelo y Prototipo

Semejanza Cinemática

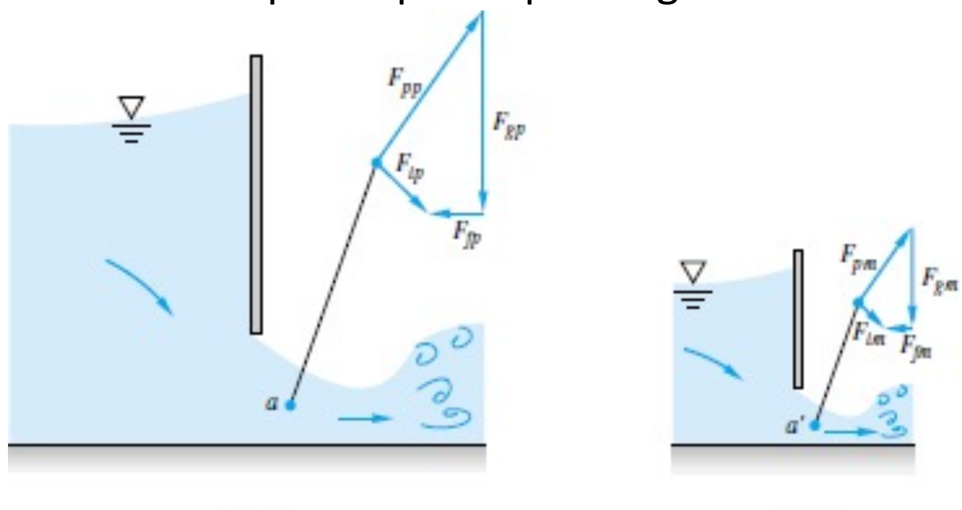


El Flujo es cinematicamente similar (similitud Cinemática) si las velocidades en el prototipo son proporcionales (por una constante) y tienen la misma dirección que en el modelo. La similitud Geométrica es un pre requisito para lograr similitud cinemática.

Similitud entre Modelo y Prototipo

Semejanza dinámica

El Flujo es dinámica similar (similitud dinámica) si las fuerzas en el prototipo son proporcionales (por una constante) y tienen la misma dirección que en el modelo. La similitud Cinemática es un pre requisito para lograr similitud dinámica.



(a) (b)

Flujo compresible: el número de Reynolds (Re), el número de Mach (M) y el cociente entre Cp y Cv (k) deben ser iguales entre modelo y prototipo.

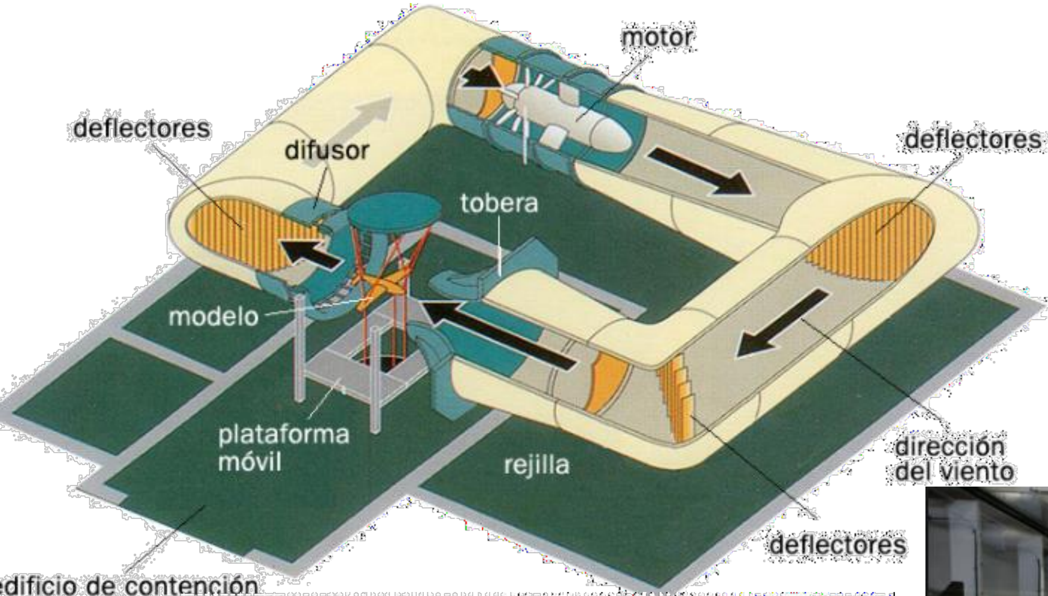
Flujo incompresible:

a) Sin superficie libre: el número de Reynolds (Re) debe ser igual entre modelo y prototipo.
b) Con superficie libre: el número de Reynolds (Re), El número de Froude (Fr), y de ser necesario, los números de Weber (We) y de cavitación (Ca) deben ser iguales entre modelo y prototipo.

Similitud entre Modelo y Prototipo

"En un campo de flujo la similitud completa se logra solo cuando existe similitud Geométrica, Cinemática y Dinámica"

Similitud entre Modelo y Prototipo



Teorema π de Buckingham

Si un proceso físico satisface el PHD e involucra **n variables dimensionales**, se puede reducir a una relación de **k (Π's) variables adimensionales**. La reducción ***k = n-j***, equivale al número máximo de variables que no forman un Π entre ellas y es siempre menor o igual al número de variables dimensionales.

$$F = f(L, V, \rho, \mu)$$ n = 5 Variables

j ≤ 3 Variables dimensionales: M -L-T

K = n - j ≥ 2 Variables adimensionales

$$C_F = g(Re)$$

$$\Pi_1 = C_F \qquad \Pi_2 = Re$$

"Una vez encontrado el valor de ***k***, deben encontrarse las variables que no forman Π's. Cada Π será el producto de los ***n* parámetros repetitivos** elevadas a potencias a determinar más una variable adicional a la que se le asigna un exponente cero convenientemente. Por costumbre, **la primera Π (*k*) generada es la dependiente, el resto serán las independientes.**"